

4. cvičení - Limity posloupností 2

👁 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Vypočítejte následující limity.

- | | |
|--|--|
| <p>(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 3^{2n+1})$</p> <p>(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!}$</p> <p>(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n} + 2n}{n! + \sqrt{n}}$</p> <p>(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 + 7n^3 - 5}{50n^5 - 24n^2}$</p> | <p>(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 7^n + n^3 \cdot 5^n}{-3n \cdot 7^n + \sqrt{n \cdot 6^n}}$</p> <p>(f) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1} \right)$</p> <p>(g) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \cdot \sin(2n)}{n \cdot \cos(3n) + (2n + \sin(4n))^2}$</p> |
|--|--|

Příklad 2. Vypočítejte následující limity.

- | | |
|---|--|
| <p>(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$</p> <p>(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{(5,00001)^n}$</p> <p>(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$</p> <p>(d) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$</p> <p>(e) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + 2^n + 3^n}$</p> <p>(f) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$</p> <p>(g) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n} - n$</p> | <p>(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2} \cdot 2^n - \sqrt{3^n + 2^n}}$</p> <p>(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$</p> <p>(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{2^n \sqrt[n]{4^n + \sqrt{n}}}$</p> <p>(k) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[n]{2n}}$</p> <p>(l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$</p> <p>(m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 2^{n+1} + \dots + 2^{2n}}$</p> |
|---|--|

Příklad 3. Vypočítejte následující limity.

- | | |
|--|--|
| <p>(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{2} \right)$</p> <p>(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + n}{n^2}$</p> <p>(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$</p> | <p>(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$</p> <p>(e) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$, pro $a, b, c > 0$</p> <p>(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}}$, pro $a > b > 0$</p> |
|--|--|

Příklad 4. Vypočítejte následující limity.

- | | |
|--|--|
| <p>(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor^3}{n - \lfloor \sqrt{n+9} \rfloor}$</p> <p>(b) 👁 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor$</p> | <p>(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \dots + \lfloor n\sqrt{n} \rfloor}$</p> |
|--|--|



Příklad 5. Dokažte následující:

(a) pro $a > 1$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

(b) pro $a \in (0, 1)$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$

(c) Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(d) Pro $a > 0$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

(e) Pro $a > 1, b > 0$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

(f) Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

(g) Pro $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(h) Pro $a > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$

(i) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

